ВЫДАЮЩИЕСЯ АВТОРЫ И ИХ УЧЕБНИКИ

ГЕОМЕТРИЯ для 7—9 и 10—11 КЛАССОВ,

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА 10—11 КЛАССОВ

В марте—апреле 1978 г. Министерство просвещения РСФСР сообщало в высшие правительственные и партийные инстанции, что математическая подготовка выпускников неудовлетворительна. Кроме того, была создана специальная комиссия по созданию новых программ и написанию новых учебников математики под руководством академика АН СССР А. Н. Тихонова (научный руководитель) и Ю. Н. Колягина (педагогический руководитель).

В мае 1978 г. Бюро Отделения математики АН СССР в своём постановлении признало «существующее положение со школьными программами и учебниками по математике неудовлетворительными вследствие неприемлемости принципов, заложенных в основу программ…».

В сентябре 1978 г. были обнародованы результаты приёмных экзаменов в МГУ, МФТИ, МИФИ и др. вузы, которые сдавали абитуриенты, завершившие изучение математики на теоретико-множественной основе. Было отмечено, что знания выпускников страдают формализмом, навыки вычислений, решение уравнений и др. плохо сформированы.

В декабре 1978 г. на Общем собрании Отделения математики АН СССР было обсуждено положение дел со школьной математикой и решено завершить доработку новых программ Министерства просвещения РСФСР к 1 февраля 1979 г. Для введения новых программ и учебников с 1 сентября 1979 г. в некоторых регионах РСФСР начать апробацию новых учебников.

Была создана комиссия отделения математики АН СССР по новой реформе школьного математического образования в составе академиков А. Н. Тихонова, И. М. Виноградова, А. В. Погорелова, Л. С. Понтрягина.

В 1978 г. А. Н. Тихоновым и Ю. М. Колягиным (совместно с МП РСФСР) были созданы два авторских коллектива для написания учебников по алгебре и по геометрии для 6-8 и 9-10 классов.

По геометрии: профессора МГУ Э. Г. Позднякив. Ф. Бутузов, профессор МГПИ Л. С. Атанасян, старший научный сотрудник МГУ С. Б. Кадомцев.

По алгебре: профессора МФТИ Ю. В. Сидоров и М. И. Шабунин, профессор МГУ Ш. А. Алимов, доктор педагогических наук Ю. М. Колягин.

После апробации в состав авторских коллективов были введены опытные учителя экспериментаторы: в геометрию для 7—9 классов — И. И. Юдина, в геометрию для 10—11 классов — Л. С. Киселева, в алгебру и начала анализа для 10—11 — Н. Е. Фёдорова. После введения в программу элементов теории вероятности и статистики в коллектив авторов вошла М. В. Ткачёва.

Андрей Николаевич Тихонов (1906—1993) — математик и геофизик, академик АН СССР. Специалист в области вычислительной математики и математической физики. Основатель факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

До революции учился в гимназии. В 13 лет начал работать конторщиком на железной дороге. Затем в 1922 г. сдаёт экзамены по программе рабочих факультетов на вечерних курсах и в 16 лет поступает в Московский университет, который окончил в 1927 г. Затем аспирантура НИИ математики и механики МГУ, ученик П. С. Александрова. В работе «Об универсальных пространствах» доказал теорему, которая сделала эту работу (после опубликования) одной из наиболее часто цитируемых в мировой литературе. Доктор физико-математических наук с 1937 г.

В 1926—1928 гг. А. Н. Тихонов преподавал математику в средней школе. С 1929 г. до конца жизни он работал в МГУ — ассистент, младший научный сотрудник, доцент, профессор, заведующий кафедрой математики, декан факультета вычислительной математики и кибернетики, заведующий кафедрой математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики с 1991 г.

В 1929—1956 гг., кроме работы в МГУ, он и научный сотрудник Института теоретической геофизики АН СССР и Института географии АН СССР. С 1948 г. Тихонов руководил Вычислительной лабораторией для проведения расчётов процесса атомного взрыва, с 1953 г. — заместитель директора ОПМ МИАН, а с

1967 г. — в Институте прикладной математики АН СССР. В 1979—1989 гг. — директор Института прикладной математики АН СССР им. М. В. Келдыша и почётный директор с 1989 г. Участие ИПМ им. М. В. Келдыша в комплексе работ по созданию многоразовой космической системы «Энергия-Буран», фактически обеспечило успех проекта в целом.

Область научных интересов А. Н. Тихонова — топология и функциональный анализ; теория дифференциальных и интегральных уравнений; математическая физика и вычислительная математика. Эти теории обеспечили решение многих прикладных задач — создание медицинских томографов, реконструкция геологических пластов, диагностика неоднородной плазмы и др. Он предложил всемирно известные методы изучения строения Земли. Одним из достижений современной математики является развитая им теория некорректно поставленных задач. А. Н. Тихонов — автор более 800 научных работ, автор и редактор свыше 30 монографий и учебников.

Андрей Николаевич Тихонов был блестящим педагогом. Многие специалисты по прикладной математике и компьютерному моделированию считают его своим учителем. Его глубокое убеждение в том, что при подготовке специалистов необходимо сочетание высокой математической культуры, физической интуиции и искусства, связанного с программированием, стало обязательным условием при подготовке специалистов компьютерной эпохи и обеспечило успехи страны в области прикладной математики.

Юрий Михайлович Колягин (1927—2016). Педагог-математик, методист, доктор педагогических наук (1977), академик Российской академии образования (1993).

Родился в г. Красноярске. В 1953 г. по совету бабушки и деда поступил в педагогический институт на физико-математический факультет. Окончил МОПИ им. Н. К. Крупской (1957). Работал учителем математики в школах Московской области и Москвы (1953—1970) и был доцентом кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики математики МОПИ.

С 1971 г. работал в НИИ школ Министерства просвещения РСФСР (в 1975—1990 гг. заместитель директора). Соавтор учебников математики для средней школы, учащихся техникумов, студентов педагогических институтов, пособий учителей. В 1990-е годы сосредоточился на исследованиях в области истории образования.

Юрий Михайлович Колягин вспоминал, как проходила работа авторских коллективов. «Практически каждую неделю А. Н. Тихонов (будучи директором НПМ АН СССР и деканом факультета ВМК МГУ) собирал авторские коллективы и обсуждал с ними (иногда строку за строкой) тексты новых учебников! Более того, Андрей Николаевич заботился о сочетании в учебнике научности и доступности… Он был убеждён в том, что каждое вводимое математическое понятие должно сразу же активно работать. С ним можно было спорить, доказывать свою правоту. Его трудолюбие поражало: он работал с нами и во время своего отдыха (на даче), и во время перерывов от основной работы (в своём кабинете на факультете), и даже во время недомогания (будучи на лечении в санатории)».

В 1981 г. вышли первые пробные учебники по геометрии и алгебре для 6—8 классов тиражом 39 000 экз., а в 1982 г. вышли пробные учебники для 9—10 классов тиражом 50 000 экз. Началась апробация учебников в некоторых регионах РСФСР, в то время основная школа начиналась с 4 класса.

В 1988 г. рукописи учебников Атанасяна и др. и Алимова и др. победили на *Всесоюзном конкурсе учебников.* Учебник геометрии занял первое место. Решением Гособразования СССР учебники, занявшие первых три места на конкурсе, были рекомендованы к изданию как альтернативные. Конечно, учебники неоднократно дорабатывались из-за изменения программ по математике и количества часов в учебном плане.

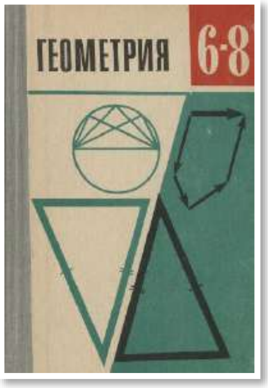
Центральные идеи курса геометрия 7–11 классов

Атанасян (1921—1998)
Левон Сергеевич

Бутузов (1939—1993)
Валентин Фёдорович

Поздняк (1923—1993)
Эдуард Генрихович

Основные **геометрические понятия** вводятся **на основе наглядных представлений**, что делает учебник доступным для самостоятельного изучения школьниками. Учебники геометрии для 7–9 и 10–11 классов строится на сочетании классического дедуктивного подхода с наглядностью. Ключевые идеи включают пошаговое введение аксиом, приоритет логических доказательств, развитие пространственных представлений, постепенное усложнение материала, поддерживаемое хорошо сбалансированной и тщательно продуманной системой задач.



Основные методические особенности учебников:

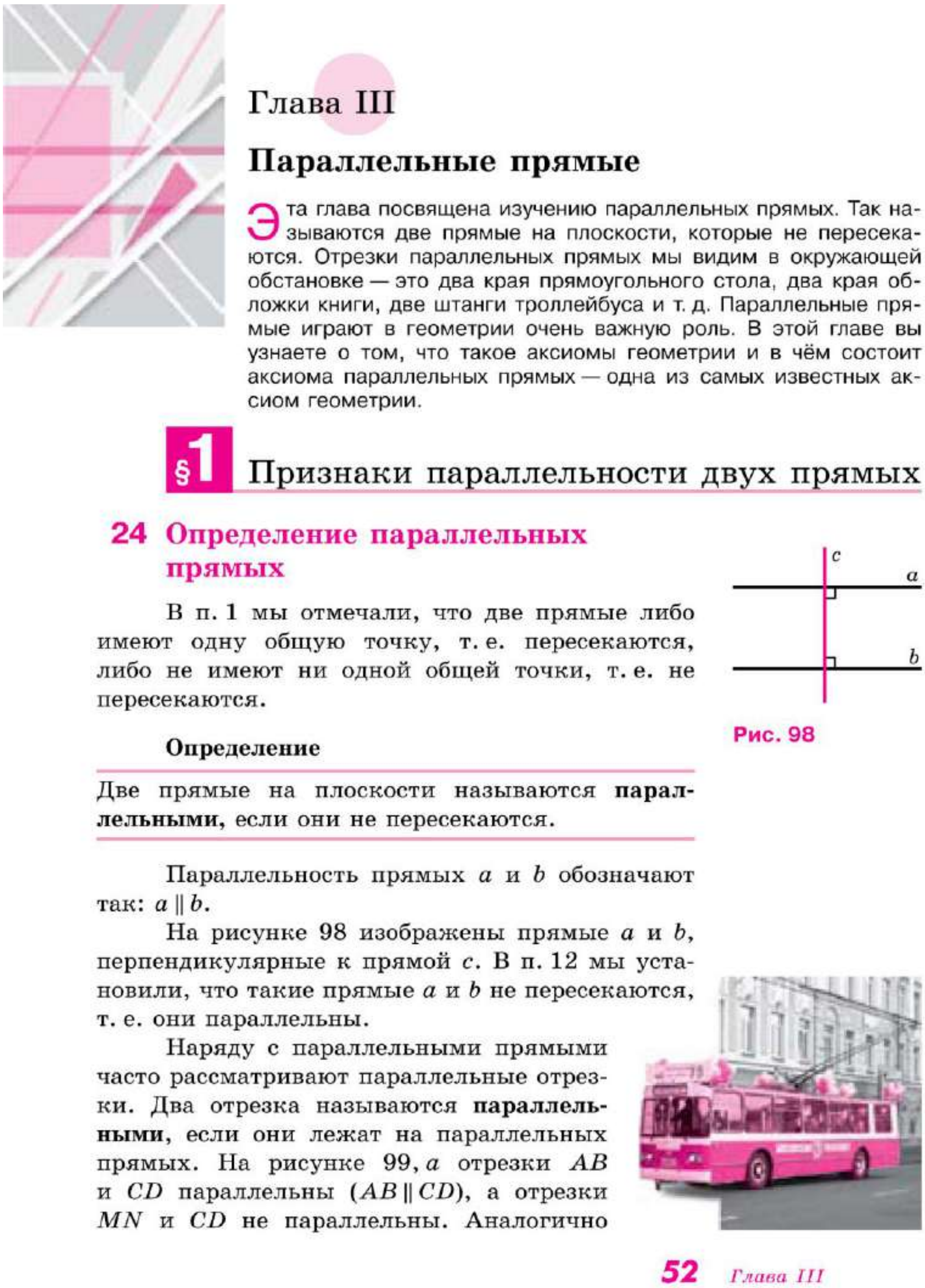
- **Классическая дедуктивная структура.** Построение курса строится на постепенном переходе от простейших фигур (точка, прямая, плоскость) к сложным с акцентом на доказательство теорем (аксиоматический подход).

- **Принцип наглядности.** Активное использование чертежей, моделей (бумага, проволока) для формирования пространственных представлений, особенно при переходе к стереометрии.

- **Поэтапное обучение доказательствам.** Требуется понимания формулировок, признаков и свойств фигур, а не только их заучивания. В 7 классе упор делается на понимание структуры теоремы, а к 9 классу — на самостоятельное построение цепочек рассуждений.

- **Практическая направленность.** Введение понятий через наблюдение и практические задания (например, измерения, построения) перед теоретическим определением. Учебники содержат преамбулы к главам, призванные мотивировать учащихся на изучение геометрии.

- **Спиральный метод обучения.** Возвращение к изученным темам на более высоком уровне (например, свойства треугольников в 7 классе и их применение в тригонометрии в 9—10 классах).
- **Интеграция теории и практики.** Включает методы решения задач, которые помогают понять теорию и подготовиться к контрольным работам.



Глава III

Параллельные прямые

Эта глава посвящена изучению параллельных прямых. Так называются две прямые на плоскости, которые не пересекаются. Отрезки параллельных прямых мы видим в окружающей обстановке — это два края прямоугольного стола, два края обложки книги, две штанги троллейбуса и т. д. Параллельные прямые играют в геометрии очень важную роль. В этой главе вы узнаете о том, что такое аксиомы геометрии и в чём состоит аксиома параллельных прямых — одна из самых известных аксиом геометрии.

§1 Признаки параллельности двух прямых

24 Определение параллельных прямых

В п. 1 мы отмечали, что две прямые либо имеют одну общую точку, т. е. пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т. е. не пересекаются.

Рис. 98

Определение

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначают так: $a \parallel b$.

На рисунке 98 изображены прямые a и b, перпендикулярные к прямой c. В п. 12 мы установили, что такие прямые a и b не пересекаются, т. е. они параллельны.

Наряду с параллельными прямыми часто рассматривают параллельные отрезки. Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. На рисунке 99, a отрезки AB и CD параллельны ($AB \parallel CD$), а отрезки MN и CD не параллельны. Аналогично

52 Глава III

Учебники геометрии Л. С. Атанасяна и др. ориентированы на формирование доказательной базы, системного мышления и умения решать геометрические задачи.

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2, \quad (x_0 - d)^2 + y_0^2 = r^2. \qquad (5)$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем равенство $2x_0d - d^2 = R^2 - r^2$, откуда

$$x_0 = \frac{1}{2d}(R^2 + d^2 - r^2). \qquad (6)$$

Заметим, что $x_0 > 0$, поскольку $R \geqslant r$ и $d > 0$. Кроме того, как следует из первого равенства (5), $x_0 = \sqrt{R^2 - y_0^2}$ £ R, т. е. для величин R, r и d должно выполняться неравенство $\frac{1}{2d}(R^2 + d^2 - r^2) \leqslant R$ или $R^2 + d^2 - r^2 \leqslant 2dR$. Последнее неравенство запишем в виде $(d - R)^2 \leqslant r^2$. Отсюда следует, что $-r \leqslant d - R \leqslant r$, или

$$R - r \leqslant d \leqslant R + r. \qquad (7)$$

Отметим, что $x_0 = R$, если $d = R - r$ или $d = R + r$, и $x_0 < R$, если $R - r < d < R + r$.

Итак, если система уравнений (4) имеет решение, то величина d удовлетворяет неравенствам (7). Поэтому, если не выполнено какое-то из неравенств (7), то система (4) не имеет решений и, следовательно, данные окружности не имеют общих точек. Так будет в двух случаях:

1) $d < R - r$, т. е. $d + r < R$ (рис. 288, *в*). В этом случае окружность радиуса r лежит внутри круга радиуса R. Говорят также, что **одна окружность лежит внутри другой.**

2) $d > R + r$ (рис. 288, *г*). В этом случае говорят, что **одна окружность лежит вне другой.**

Если неравенства (7) выполнены, то возможны три случая:

3) $d = R - r$, при этом $R > r$, поскольку $d > 0$. Как уже было отмечено, в этом случае $x_0 = R$, поэтому из первого из равенств (5) следует, что $y_0 = 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что пара чисел $x = R$, $y = 0$ есть решение системы (4). Таким образом, в данном случае окружности имеют ровно одну общую точку, и их взаимное расположение изображено на рисунке 288, *д*. Говорят, что **окружности касаются изнутри.**

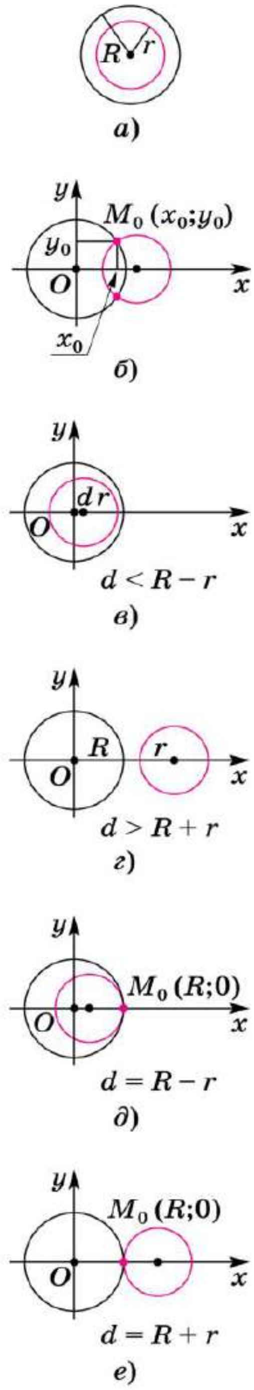


Рис. 288

Большой объём упражнений, разделённых по уровням сложности, включает:

- обязательные задачи (начальный уровень),
- задачи с практическим содержанием,
- упражнения на усвоение базовых понятий,
- сложные задачи на доказательство и построение,
- исследовательские задачи.

Такая система задач позволяет развить наглядные представления и логическое мышление учащихся.

1048 Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A\ (2;\ 8)$, $B\ (-1;\ 5)$, $C\ (3;\ 1)$.

1049 Найдите углы треугольника с вершинами $A\ (-1;\ \sqrt{3})$, $B\ (1;\ -\sqrt{3})$ и $C\left(\frac{1}{2};\ \sqrt{3}\right)$.

1050 Вычислите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=60°$.

1051 Известно, что $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=\widehat{\vec{b}\vec{c}}=60°$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$.

1052 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=4$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1053 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Применение скалярного произведения векторов к решению задач

1054 Докажите, что если AM — медиана треугольника ABC, то $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Пользуясь этой формулой, докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.

Решение

Точка M — середина отрезка BC, поэтому $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Отсюда получаем

$$(2\overrightarrow{AM})\cdot(2\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=$$
$$=AB^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A+AC^2,$$

или $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Второе утверждение задачи докажите самостоятельно.

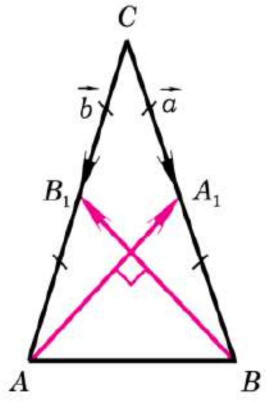


Рис. 305

1055 Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведённые к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Решение

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и AA_1, BB_1 — его медианы, проведённые к боковым сторонам (рис. 305). Введём обозначения $\overrightarrow{CA_1}=\vec{a}$,

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе X

1256 Вершины четырёхугольника $ABCD$ имеют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ и $D(x_4; y_4)$. Докажите, что этот четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ и $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$.

1257 Даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Докажите, что координаты $(x; y)$ точки C, делящей отрезок AB в отношении λ (т. е. $\frac{AC}{CB} = \lambda$), выражаются формулами $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

1258 Из физики известно, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан. Найдите координаты центра тяжести такой пластинки, если координаты её вершин равны: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$.

1259 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(3; 0)$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.

1260 В треугольнике ABC $AC = 9$ см, $BC = 12$ см. Медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найдите AB.

1261 Найдите координаты центра тяжести системы трёх масс m_1, m_2 и m_3, сосредоточенных соответственно в точках $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$.

1262 В каждом из следующих случаев на оси абсцисс найдите точку M, для которой сумма её расстояний от точек A и B имеет наименьшее значение:
а) $A(2; 3)$, $B(4; -5)$;
б) $A(-2; 4)$, $B(3; 1)$.

1263 Докажите, что:
а) уравнение $Ax + By + C = 0$, где A и B одновременно не равны нулю, является уравнением прямой;
б) уравнение $x^2 - xy - 2 = 0$ не является уравнением окружности.

1264 Найдите точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 1$, и вычислите длину их общей хорды.

1265 Даны три точки A, B, C и три числа α, β, γ. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых сумма $\alpha AM^2 + \beta BM^2 + \gamma CM^2$ имеет постоянное значение, если:
а) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$;
б) $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

1266 Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. Для каждой точки M_1 прямой a на луче AM_1 взята такая точка M, что $AM_1 \cdot AM = k$, где k — данное положительное число. Найдите множество всех точек M.

Исследовательские задачи

Предлагаемые задачи ориентированы на проведение исследований, связанных как с решением некоторых задач из учебника, так и с постановкой новых задач.

7 класс

1 Сформулируйте новые признаки равенства треугольников, используя не только стороны и углы, но также медианы, биссектрисы и высоты треугольников. Примеры таких признаков дают задачи **161**, **176**, **329**.
Эта задача может быть поставлена перед группой учащихся: создать банк признаков равенства треугольников; может использоваться как предмет интеллектуального соревнования между двумя или несколькими группами учащихся.

2 Сформулируйте признаки равенства равнобедренных треугольников.

3 Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

4 Для каждого из новых признаков равенства треугольников рассмотрите задачу на построение: построить с помощью циркуля и линейки треугольник по тем элементам, которые фигурируют в признаке.

8 класс

1 Задача **813** и её обобщение на случай невыпуклого четырёхугольника. (Предложите способ решения, применимый для любого четырёхугольника.)

2 Теорема Птолемея и ряд задач, решаемых с её помощью (задачи **852**, **889**, **893**, **1286**). Предложите свои задачи на применение этой теоремы.

3 Окружность Эйлера (задача **895**). Дополнительно исследуйте, сколько точек, указанных в задаче **895**, могут быть различными.

4 Прямая Симсона (задача **896**). Исследуйте все возможные случаи.

5 Прямая Эйлера: докажите, что в любом неравностороннем треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений), центр описанной около треугольника окружности и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой. Установите, в каком отношении эти точки разделяют отрезок с концами в крайних точках.

Учебники также содержат проектные задачи с использованием среды «живая математика», темы рефератов и докладов, список рекомендуемой литературы.

Список литературы

1 Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Позняк Э. Г., Шестаков С. А., Юдина И. И. Планиметрия. Пособие для углублённого изучения математики. — М.: Физматлит, 2005.

2 Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Шестаков С. А., Юдина И. И. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 кл. — М.: Вита — Пресс, 2006.

3 Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Юдина И. И. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 кл. — М.: Вита — Пресс, 2002.

Центральные идеи курса алгебра и начала математического анализа 10–11 классы

Амилов (1945)
Шавкат Арифджанович

Шабунин (1930—2017)
Михаил Иванович

Фёдорова (1946—2021)
Надежда Евгеньевна

1. Исторические предпосылки и вклад математики в развитие человечества, общекультурная составляющая математики.
2. Исторически обоснованный подход к введению и изучению новых понятий.
3. Фундаментальность образования, которое в школьном курсе математики проявляется в построении обучения на основе науки-математики с использованием доступного для учащихся содержания и способов действий

с учётом создания фундамента для последующего изучения математики и смежных школьных дисциплин, а также на подготовку к обучению в вузе.

4. Создание неформальных представлений о едином уровне строгости.
5. Превалирование методов, принципов и подходов к решению задач над частными рецептами.
6. Примат решения задач (более 1500 задач для самостоятельного решения, а также более 300 примеров решения задач).
7. Работа над формированием универсальных учебных действий как приоритет подбора материала:

   а) выделение в объекте изучения существенных и несущественных признаков;

   б) составление целого из частей или дополнение недостающих компонентов;

   в) выбор критериев для сравнения и классификации объектов;

   г) подведение под понятие и выведение следствий;

   д) установление причинно-следственных связей и построение логической цепочки рассуждения;

   е) выдвижение гипотез и их обоснование.

Основные методические особенности курса:

формирование представлений об идеях и методах математики; о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов окружающего мира;

овладение языком математики в устной и письменной форме, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения школьных естественно-научных дисциплин, продолжения образования и освоения избранной специальности на современном уровне;

развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и её приложения в будущей профессиональной деятельности;

воспитание средствами математики культуры личности через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; понимания значимости математики для научно-технического прогресса.

Содержательные линии учебника

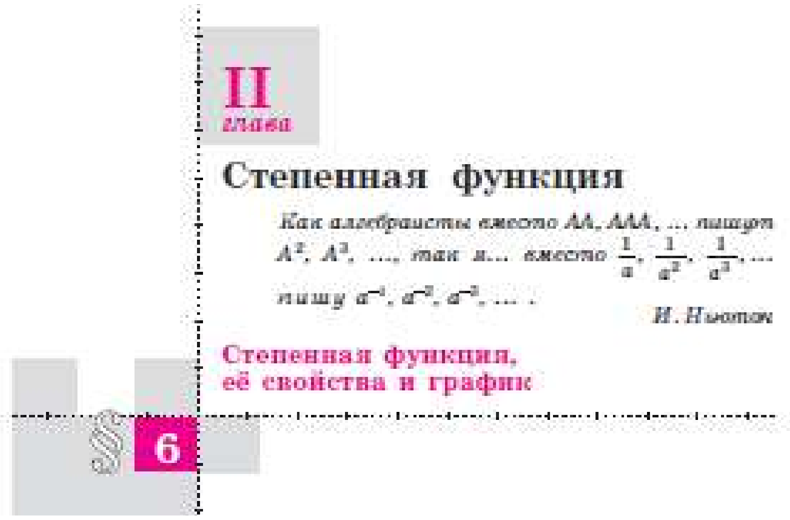
- <u>Числовая:</u> действительные числа, степень с действительным показателем, логарифмы чисел, тригонометрические числовые выражения.
- <u>Функциональная:</u> степенная, показательная, логарифмическая и тригонометрические функции.
- <u>Преобразования:</u> выражения, содержащие степени, логарифмы и тригонометрические функции.
- <u>Уравнения и неравенства</u>: иррациональные, логарифмические, показательные и тригонометрические.

Методические особенности изложения изучаемого материала

1. Числовая линия и линия преобразований рассматриваются параллельно.
2. Элементарные функции изучаются без использования производной.
3. Графические средства наглядности используются постоянно.
4. Вводятся понятия равносильности уравнений и неравенств.
5. Введению нового понятия предшествует рассмотрение прикладных задач, которое мотивирует нужность их введения.
6. Система упражнений дифференцирована на четырёх уровнях.
7. Уделяется особое внимание применению полученных знаний.

Удобная навигация в учебнике

1. В начале каждой главы учебника приведены высказывания великих учёных математиков по теме изучаемого материала.



2. Выделен основной материал, который надо знать, и выделены решения типовых задач.

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной снизу* на множестве X, если существует число C_1 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq C_1$.

Это означает, что все точки графика ограниченной снизу функции $y = f(x)$, $x \in X$ расположены выше прямой $y = C_1$ или на этой прямой (рис. 6, *а*).

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной сверху* на множестве X, если существует число C_2 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq C_2$.

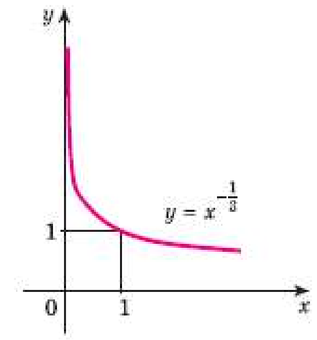


Рис. 12

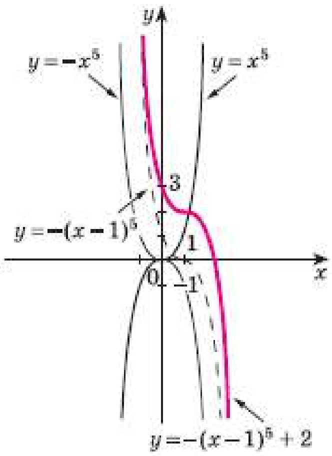


Рис. 13

График функции $y = x^p$, где p — отрицательное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (рис. 12).

Задача 1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

▶ Функция $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ убывает при $x \in [-2; 0]$, возрастает при $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, следовательно, она принимает наименьшее значение, равное нулю, при $x = 0$. Наибольшее значение этой функции — наибольшее из чисел $y(-2)$ и $y\left(\frac{1}{2}\right)$. Так как

$y(-2) = (-2)^6 = 64$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$,

то $y(-2) > y\left(\frac{1}{2}\right)$ и наибольшее значение равно 64. ◁

Задача 2 Построить график функции $y = -(x-1)^5 + 2$.

▶ Областью определения функции является множество действительных чисел. Строим график функции $y = -x^5$, осуществляем сдвиг вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо и сдвиг вдоль оси ординат на 2 единицы вверх. График изображён на рисунке 13. ◁

Задача 3* Найти точки пересечения графиков функций

$$y = \sqrt[3]{x} \quad \text{и} \quad y = x^{\frac{4}{3}}.$$

3. Предусмотрен самоконтроль деятельности с помощью рубрики «Проверь себя!»

253 Решить неравенство:

1) $3^{x-2} > 9$; 2) $5^{2x} < \frac{1}{25}$; 3) $0{,}7^{x^2+2x} < 0{,}7^3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \frac{1}{81}$.

254 Решить графически уравнение:

1) $2^{-x} = 3x + 10$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 2x + 5$.

Проверь себя!

1 Построить схематически график функции:

1) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; 2) $y = 5^x$.

2 Сравнить числа:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; 2) $5^{-0,2}$ и $5^{-1,2}$.

3 Решить уравнение:

1) $3^{x+1} = 27^{x-1}$; 2) $0{,}2^{x^2+4x-5} = 1$;

3) $2^{x+2} - 2^{x+1} = 12$; 4) $4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 1 = 0$.

4 Решить неравенство:

1) $7^{x-2} > 49$; 2) $0{,}5^{x^2-2} > \frac{1}{4}$.

255 Доказать, что последовательность значений функции $y = 2^x$ при натуральных значениях $x = 1, 2, 3, \ldots$ является геометрической прогрессией.

4. Трёхуровневая система упражнений в параграфах и к главам позволяет закрепить, систематизировать и обобщить полученные знания и навыки на базовом и профильном уровнях.

Упражнения к главе IV

Вычислить (368—372).

368 1) $\log_{15} 225$; 2) $\log_4 256$; 3) $\log_3 \frac{1}{243}$; 4) $\log_7 \frac{1}{343}$.

369 1) $\log_{\frac{1}{4}} 64$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$.

370 1) $\log_{11} 1$; 2) $\log_7 7$; 3) $\log_{16} 64$; 4) $\log_{27} 9$.

371 1) $(0{,}1)^{-\lg 0,3}$; 2) $10^{-\lg 4}$; 3) $5^{-\log_5 3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$.

372 1) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6$;

2) $\frac{2}{3}\lg 0{,}001 + \lg\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\lg\sqrt{10000}$.

373 Вычислить с помощью микрокалькулятора:

1) $\log_5 7$; 2) $\log_3 12$; 3) $\log_{1,2} 0{,}17$; 4) $\log_{0,3} 8{,}1$.

374 Построить график функции:

1) $y = \log_4 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.